

ANÁLISIS DE SEÑALES Y SISTEMAS**PRIMER PARCIAL****22/6/99****Turno Tarde**

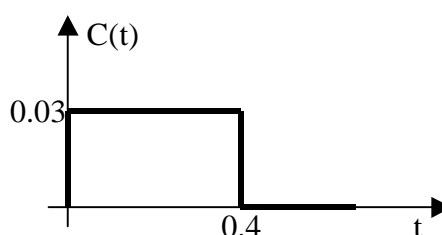
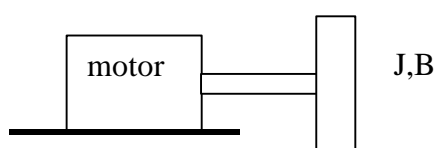
- 1) Se tiene un motor de corriente continua que posee solidario a su eje una polea para levantar determinada carga. El sistema motor polea posee los siguientes parámetros:

$$J = 24 \cdot 10^{-6} \text{ Kg } m^2$$

Momento de inercia de la polea.

$$B = 120 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Kg } m^2}{s}$$

Rozamiento de la polea con el aire más rozamientos parásitos.



Al motor se le aplica una cupla como la graficada y se pide :

- Hallar analíticamente la solución de la ecuación diferencial suponiendo como salida la velocidad angular ω , y graficar $\omega(t)$ para la $C(t)$ de la figura.
- Hallar la ω máxima desarrollada por el motor en RPM ($60 \text{ RPM} = 2\pi \text{ rad/seg}$).
- Si la señal cupla de entrada mantuviera su valor por un tiempo indefinido, ¿Cuál sería la ω máxima del motor? ¿De qué variable depende esta ω máxima, de J, B o J y B? ¿Por qué? Justifique explicando que parte de la respuesta es transitoria y cual permanente..

Soluci ón:

Para comenzar debemos plantear la ecuación diferencial que modeliza este sistema. Siempre basándonos en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes (suponemos al rozamiento B y al momento de inercia de la polea J ctes), proponemos:

$$C(t) = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

Donde la entrada es $C(t)$ =cupla=Torque en [Nm] y la salida $\omega(t)$ es la velocidad angular en [rad/seg]. Toda solución se puede descomponer en una parte homogénea (a entrada $c(t)=0$) mas una particular.

$$\omega(t) = \omega_H(t) + \omega_P(t)$$

Solución Homogénea:

$$0 = J \frac{\partial \omega_H}{\partial t} + B \omega_H \Rightarrow J \frac{\partial \omega_H}{\partial t} = -B \omega_H \Rightarrow \frac{d\omega_H}{\omega_H} = -\frac{B}{J} dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\omega_H}{\omega_H} = \int -\frac{B}{J} dt \Rightarrow \ln \omega_H + \ln C = -\frac{B}{J} t \Rightarrow$$

$$\omega_H(t) = C \cdot e^{-\frac{B}{J}t} = C \cdot e^{-\frac{t}{0.2}}$$

Donde observamos la presencia de una constante arbitraria a determinar con las condiciones iniciales.

Solución Particular:Para 0.4seg > t > 0:

Proponemos una solución particular acorde a una entrada constante:

$$\omega_p(t) = K$$

$$\dot{\omega}_p(t) = 0$$

Reemplazando en la ec. dif.:

$$C_{MAX} = 0 + B \omega_p(t) = B \cdot K \Rightarrow$$

$$K = \frac{C_{MAX}}{B} = \frac{0.03 Nm}{120 \cdot 10^{-6} \frac{Kg \cdot m^2}{s}} = 250 \frac{1}{seg}$$

Por lo tanto para 0.4seg > t > 0 y las condiciones iniciales suponiendo el motor detenido en t=0seg:

$$\omega(t) = \left(C \cdot e^{-\frac{t}{0.2}} + 250 \right) \frac{1}{seg} \Rightarrow$$

$$\omega(t = 0seg) = 0 \frac{1}{seg} \Rightarrow$$

$$\omega(t) = 250 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.2}} \right) \frac{1}{seg}$$

Para t > 0.4seg:

Como la entrada para este intervalo es cero, entonces la solución es solo la homogénea:

NOTA: Ver el desplazamiento propuesto ya que esta señal debe arrancar desde t=0.4 seg y no desde cero.

$$\omega(t) = C \cdot e^{-\frac{B}{J}(t-0.4seg)} = C \cdot e^{-\frac{(t-0.4seg)}{0.2}}$$

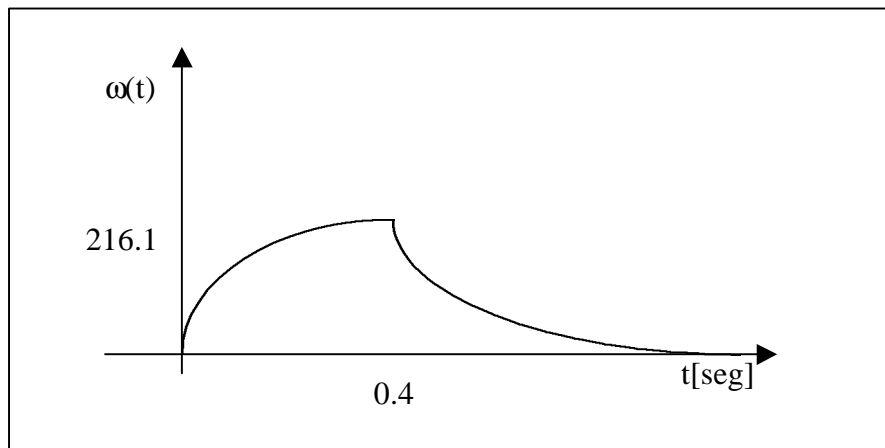
Aun debemos hallar el valor de C (cte arbitraria). Para eso hallamos el valor de la salida hasta ese momento de la siguiente forma:

$$\omega(0.4\text{seg}) = 250 \left(1 - e^{-\frac{0.4}{0.2}} \right) \frac{1}{\text{seg}} = 216.2 \frac{1}{\text{seg}}$$

$$\omega(0.4\text{seg}) = C \cdot e^{-\frac{(0.4-0.4)}{0.2}} = C = 216.2 \frac{1}{\text{seg}}$$

Para $t > 0.4\text{seg}$ entonces:

$$\omega(t) = 216.2 \cdot e^{-\frac{(t-0.4\text{seg})}{0.2}}$$



Esquema de $\omega(t)$

2) Considere un sistema de tiempo continuo LTI (lineal invariante en el tiempo) cuya respuesta al escalón (respuesta indicial) es: $s(t) = e^{-\frac{t}{2}} u(t)$

Si simbolizamos como $x(t)$ a la entrada y $y(t)$ a la salida, se pide:

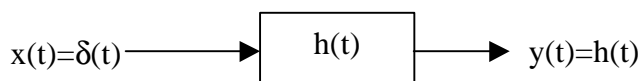
- A) Determine $y(t)$ si $x(t) = u(t-1) - u(t-3)$ **sin realizar la convolución.**
- B) Determine la respuesta impulsional $h(t)$ del sistema.

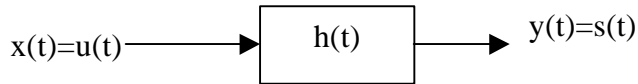
Solución:

A) Como el dato es la respuesta al escalón, entonces al aparecer un $x(t) = u(t)$ en la entrada, en la salida tenemos $y(t) = s(t)$. Por invarianza en el tiempo deducimos que si en la entrada colocamos $x(t) = u(t-t_0)$ entonces $y(t) = s(t-t_0)$. Por lo tanto

$$\text{si } x(t) = u(t-1) - u(t-3) \rightarrow y(t) = s(t-1) - s(t-3) = e^{-\frac{t-1}{2}} u(t-1) - e^{-\frac{t-3}{2}} u(t-3)$$

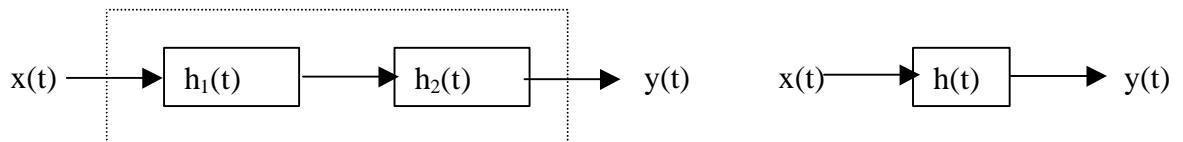
B) Se puede deducir que la respuesta impulsional (al $x(t) = \delta(t)$) es igual a la derivada de la respuesta indicial (al $x(t) = u(t)$)





$$h(t) = \frac{s(t)}{t} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

3) El sistema de la figura está formado por la conexión de dos sistemas en cascada, con respuesta impulsional $h_1(t)$ y $h_2(t)$.



siendo:

$$h_1(t) = e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

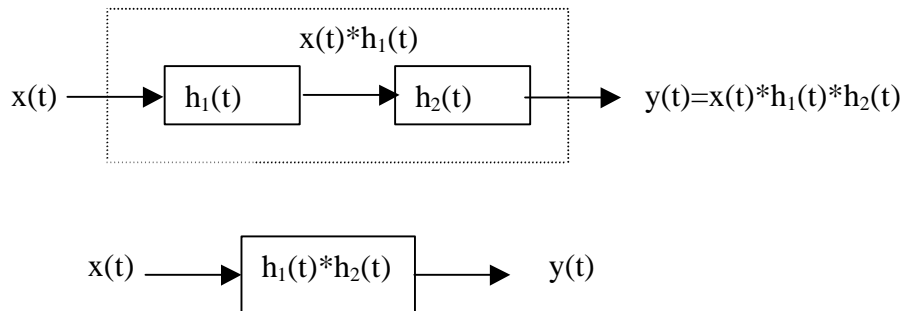
$$h_2(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

Se pide:

- A) Encuentre el $h(t)$ del sistema completo.
- B) El sistema completo ¿Es estable?

Sol uci ón:

A)



$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\frac{\tau}{2}} e^{-\frac{t-\tau}{2}} d\tau = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t 1 d\tau = t e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

B) Como el $h(t)$ es acotado el sistema es BIBO estable. (Bounded Input-Bounded Output)