

Capítulo 1

El plano complejo

1.1 Formas posibles para escribir un número complejo

cartesiana	binómica	polar	trigonométrica	exponencial
(a, b)	$a + bi$	r_θ	$r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$	$r \cdot e^{i\theta}$

1.2 Propiedades de los números complejos

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0$$

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

$$-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot |z_1|^2 + 2 \cdot |z_2|^2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z$$

1.3 Operaciones con números complejos

- suma: $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

- producto: $z_1 \cdot z_2 = r_\theta \cdot \rho_\alpha = (r \cdot \rho)_{\theta+\alpha}$

- división: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\theta}{\rho_\alpha} = \left(\frac{r}{\rho} \right)_{\theta-\alpha} \text{ si } z_2 \neq 0$

- potencias: $z^n = r^n_{n\theta}$

- raíces: $\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r} \right)_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1$

- exponencial: $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$
 $|e^z| = e^a \quad \arg(e^z) = b$
 $z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$
- razones trigonométricas: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$
 $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
 $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$
 $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$
 $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \quad \cos(-z) = \cos z$
- razones hiperbólicas: $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
 $\cosh z - \operatorname{senh} z = 1$
 $\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$
 $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$
- logaritmos: $\operatorname{Ln}(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$

1.4 Otras propiedades

- Fórmula de De Moivre: $z^n = [r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n \cdot (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$
- Igualdad de Euler: $e^{ai} = \cos a + i \operatorname{sen} a$

1.5 Conjuntos de puntos

Dado un conjunto S , un punto z perteneciente al mismo puede ser:

- punto de acumulación: si cualquier entorno perforado de centro z contiene puntos de S .
- conjunto cerrado: un conjunto S es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación.
- conjunto acotado: un conjunto es acotado si se puede hallar una constante M tal que $|z| < M$ para todo punto z en S .

- punto interior: si existe un entorno de centro z cuyos puntos pertenecen todos a S .
- punto exterior: si existe un entorno de centro z donde ningún punto pertenezca a S .
- punto frontera: si cualquier entorno de centro z contiene tanto a puntos que pertenezcan a S como a puntos que no pertenezcan.
- conjunto abierto: un conjunto S es abierto si consiste únicamente de puntos interiores.
- conjunto conexo: un conjunto abierto S es conexo si cualquier par de puntos del conjunto pueden ser unidos por un camino formado por segmentos recta contenidos en S .
- región abierta o dominio: un conjunto abierto conexo es una región abierta o dominio.
- clausura de un conjunto: si a un conjunto S se le agregan sus puntos de acumulación, el nuevo conjunto se llama clausura de S y es un conjunto cerrado.
- región cerrada: la clausura de una región abierta o dominio se llama región cerrada.

Capítulo 2

Función compleja de una variable compleja

2.1 Definición de función de variable compleja

Sea A un subconjunto del plano complejo C . Se denomina función compleja de una variable compleja a toda aplicación f tal que a cada $z \in A$ le hace corresponder un elemento, $w = f(z) \in C$.

- dominio: El dominio de una función es el mayor subconjunto de C donde tenga sentido la función.

Toda función se puede escribir mediante el siguiente par de funciones de dos variables reales:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

2.2 Límites de funciones. Propiedades

Definición de límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / 0 < |z - z_0| < \delta \text{ entonces } |f(z) - L| < \varepsilon$$

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = H$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = K$
- El límite de una función, si existe, es único.
- Si la función $f(z)$ tiene límite finito en z_0 , existe un entorno de este punto donde dicha función está acotada. (se entiende como función acotada aquella que su módulo lo está).
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |L|$. El recíproco sólo es cierto si $z_0 = 0$.

2.3 Continuidad de las funciones elementales

Una función es **continua** si:

- existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
- existe $f(z_0)$
- son iguales

Una función es **uniformemente continua** si:

- es continua en un entorno cerrado y acotado

- función polinómica: Siempre son continuas.
- función racional: Del tipo $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Continuas donde $Q(z) \neq 0$.
- función exponencial: Siempre son continuas.
- función logarítmica: Del tipo $f(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ con $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$
Continuas salvo en los puntos donde $\theta = \alpha$.
- funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son siempre continuas.
 $\operatorname{tg} z$ sólo es continua donde $\cos z \neq 0$.
- funciones hiperbólicas: Igual que las trigonométricas.

Capítulo 3

Derivada de funciones de variable compleja

3.1 Definiciones y propiedades elementales

Sea U un subconjunto abierto del plano complejo C , $f(z)$ una función de U en C y z_0 un punto de U . Diremos que $f(z)$ es derivable en z_0 si existe el límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

- Si f es derivable en z_0 , es continua en dicho punto.
- Una función es **analítica** en un punto si es derivable en todos los puntos de algún entorno de dicho punto.

Si una función es analítica en todo el plano complejo, se denomina **función entera**.

3.2 Condiciones de Cauchy-Riemann

$$f \text{ es derivable en } z_0 \Leftrightarrow u(x, y) \text{ y } v(x, y) \text{ son diferenciables y } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- Se denomina **punto singular** de una función a cualquier punto z_0 para el cual, en todo entorno de él, existe algún punto donde la función no es derivable.
- Una función es **armónica** si verifica la ecuación de Laplace:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

- Si una función es analítica, sus componentes u y v son armónicas.
- Si f es analítica en una región R , entonces $f'(z), f''(z), \dots$ son asimismo analíticas en R , es decir, todas las derivadas de orden superior existen en R .

3.3 Derivadas de funciones elementales

$$\frac{d}{dz} c = 0$$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z$$

$$\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \cdot \tan z$$

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\frac{d}{dz} z^n = n \cdot z^{n-1}$$

$$\frac{d}{dz} a^z = a^z \ln a$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z$$

$$\frac{d}{dz} \cot z = -\operatorname{csc}^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cdot \cot z$$

$$\frac{d}{dz} \log_a z = \frac{1}{z} \log_a e$$

$$\frac{d}{dz} \arccos z = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

etc...

Capítulo 4

Integración compleja

4.1 Curvas. Conjuntos conexos

- arco: $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ con $t \in [a, b]$
- arco diferenciable: si las funciones α y β son derivables y sus derivadas son continuas.
- longitud:
$$L = \int_a^b \sqrt{[\alpha'(t)]^2 + [\beta'(t)]^2} dt$$
- arco simple: si no se corta a sí mismo: $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
- arco cerrado: si empieza y acaba en el mismo punto: $\gamma(a) = \gamma(b)$
- conjunto conexo: si dados dos puntos existe un arco diferenciable a trozos que los une tal que todos los puntos del mismo están en el conjunto.
- conjunto simplemente conexo: si su complementario en C es conexo.
(si no tiene agujeros)
- dominio: conjunto abierto y conexo

4.2 Integral compleja

Definiciones:

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i \int_a^b y(t)dt$$

- $\int_a^b (a + ib)g(t)dt = (a + ib) \int_a^b g(t)dt$
- $\int_a^b [g_1(t) + g_2(t)]dt = \int_a^b g_1(t)dt + \int_a^b g_2(t)dt$
- $\left| \int_a^b g(t)dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|dt$

Integral de línea:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + i \cdot v(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + i \cdot y'(t)] dt$$

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

Propiedades elementales:

- $\int_C f(z) dz = - \int_{\bar{C}} f(z) dz$
- $\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$
- $\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz$
- $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z)| \cdot |z'(t)| dt \leq ML$ con M cota superior de $|f(z)|$ y L longitud de C

4.3 Teoremas

Teorema de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio, D , del plano complejo y sea C un arco cerrado y diferenciable a trozos tal que, tanto él como su interior, están contenidos en D . Entonces, $\int_C f(z) dz = 0$.

Teorema de Morera

Recíproco al de Cauchy: si $\int_C f(z) dz = 0$ con $f(z)$ continua $\Rightarrow f(z)$ es analítica

Teorema de Green

En el plano real:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

En el plano complejo:

$$\oint_C F(z, \bar{z}) = 2i \iint_S \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dA$$

4.4 Primitivas

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \text{ con } n \neq -1$$

$$\int \frac{dz}{z} = \ln z$$

$$\int e^z dz = e^z$$

$$\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$$

$$\int \operatorname{sen} z dz = -\cos z$$

$$\int \cos z dz = \operatorname{sen} z$$

$$\int \tan z dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$$

$$\int \cot z dz = \ln \operatorname{sen} z$$

$$\int \sec z dz = \ln(\sec z + \tan z)$$

$$\int \csc z dz = \ln(\csc z - \cot z)$$

$$\int \sec^2 z dz = \tan z$$

$$\int \csc^2 z dz = -\cot z$$

$$\int \sec z \tan z dz = \sec z$$

$$\int \csc z \cot z dz = -\csc z$$

$$\int \operatorname{senh} z dz = \cosh z$$

$$\int \cosh z dz = \operatorname{senh} z$$

$$\int \tanh z dz = \ln \cosh z$$

$$\int \coth z dz = \ln \operatorname{senh} z$$

$$\int \operatorname{sech} z dz = \arctan(\operatorname{senh} z)$$

$$\int \operatorname{csch} z dz = -\operatorname{arccot}(\cosh z)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 z dz = \tanh z$$

$$\int \operatorname{csch}^2 z dz = -\coth z$$

$$\int \operatorname{sech} z \tanh z dz = -\operatorname{sech} z$$

$$\int \operatorname{csch} z \coth z dz = -\operatorname{csch} z$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln \left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2} \right)$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{z}{a}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{z-a}{z+a} \right)$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{z}{a}$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}} \right)$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \frac{a}{z}$$

$$\int \sqrt{z^2 \pm a^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2} \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{z}{a}$$

$$\int e^{az} \operatorname{sen} bz dz = \frac{e^{az} (a \operatorname{sen} bz - b \cos bz)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{az} \cos bz dz = \frac{e^{az} (a \cos bz + b \operatorname{sen} bz)}{a^2 + b^2}$$

Capítulo 5

Fórmula de Cauchy

5.1 Fórmula integral de Cauchy

Proposición: Si $g(z)$ es una función analítica en un contorno cerrado y simple C junto a su interior salvo, a lo sumo, en un punto z_0 interior a C y si C' es otra curva cerrada y simple contenida en C , que contiene en su interior a dicho punto z_0 , se tiene que $\int_C g(z)dz = \int_{C'} g(z)dz$

Proposición: Sea C una curva cerrada y simple y sea z_0 un punto interior a la región que encierra. Entonces:

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Fórmula integral de Cauchy para las derivadas

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

- Si $f(z)$ es analítica en un punto z_0 , todas sus derivadas son analíticas en el mismo punto.

5.2 Otros teoremas

- Desigualdad de Cauchy: si $f(z)$ es analítica dentro y sobre un círculo C de radio r y centro en $z = a$, entonces:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Donde M es una constante tal que $|f(z)| < M$ sobre C .

Capítulo 6

Sucesiones y series. Teorema de Taylor

6.1 Series numéricas

Definición: Se denomina sucesión de números complejos a toda aplicación f del conjunto de los números naturales al de los números complejos.

- Las sucesiones se pueden estudiar atendiendo a su parte real e imaginaria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

- De igual forma para las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ convergen}$$

- Series absolutamente convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ es absolutamente convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ es convergente}$$

6.2 Series de funciones

Definición: Sea H un subconjunto de C y una sucesión de funciones $f_n(z)$, definidas sobre H . Se denomina serie de funciones a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

- Al igual que con las series numéricas, si una serie de funciones es absolutamente convergente, es convergente.

6.3 Series de potencias

Las series de potencias son un caso particular de las series de funciones. Se trata de aquellas sucesiones de la forma $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, cuya serie será $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Lema de Abel: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias y supongamos que para un determinado $r_0 > 0$ existe un $M > 0$ tal que $|a_n| \cdot r_0^n \leq M$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces, para todo número r con $0 < r < r_0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en los discos $|z - z_0| \leq r$.

- Sea ρ el supremo de todos los r para los que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ es convergente. Al número ρ se le denomina radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

- Si existe cualquiera de los siguientes límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R \quad \text{ó} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = R$$

El radio de convergencia será:

$$\rho = \frac{1}{R}$$

- Una serie de potencias con radio de convergencia distinto de cero define una función analítica. Es infinitamente derivable.

6.4 Teorema de Taylor

Sea una función $f(z)$ analítica dentro y sobre una curva cerrada simple C . Se puede escribir:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!} (z - z_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

- La región de convergencia de la serie anterior está dada por $|z - z_0| < R$, donde el radio de convergencia R es la distancia desde z_0 a la singularidad más próxima de la función $f(z)$.
- Si se toma el valor $z_0 = 0$ se obtiene la serie de MacLaurin.
- Algunas series importantes:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} & |z| < \infty \\ \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} & |z| < \infty \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} & |z| < \infty \\ \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} & |z| < 1 \\ \arctan z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} & |z| < 1 \\ (1+z)^p &= 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} z^n & |z| < 1 \end{aligned}$$

Capítulo 7

Teoremas sobre funciones analíticas

7.1 Desigualdades de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto centrado en z_0 y de radio R . Si $0 < r < R$, denotamos por $M_f(z_0, r) = \max\{|f(z)|; |z - z_0| = r\}$. Entonces se verifica que para $n = 0, 1, 2, \dots$ es:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_f(z_0, r)$$

7.2 Teorema de Liouville

Si $f(z)$ es una función entera y acotada, es decir, $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $f(z)$ es una función constante.

7.3 Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado mayor o igual que uno con coeficientes complejos admite, al menos, una raíz compleja.

7.4 Principio de los ceros aislados

- Sea D un dominio de \mathbb{C} y $f(z)$ una función analítica en él. Supongamos que existe una sucesión de puntos de D , $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim z_n = z_0$ con $z_n \neq z_0$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Entonces, $f(z) = 0$ para todo z de D .
- Sea $f(z)$ una función analítica en D , no idénticamente nula. Entonces, los ceros de $f(z)$ en D son aislados.
- Si dos funciones definidas en un dominio D coinciden en un cierto entorno, entonces coinciden en todo D .

7.5 Principio del módulo máximo

- Si $f(z)$ es una función analítica y no constante en un dominio D , entonces $|f(z)|$ no alcanza el máximo en D .
- Si $f(z)$ es analítica en un conjunto A cerrado y acotado y $f(z)$ no es constante, el máximo de $|f(z)|$ se alcanza en un punto de la frontera de A .

7.6 Teorema del argumento

- Sea $f(z)$ una función analítica en una curva C cerrada junto a su interior, salvo en un punto z_0 donde tiene una singularidad que es un polo de orden p , y sea z_1 un cero de $f(z)$ de orden m . Entonces, se verifica:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m - p$$

- Si $f(z)$ es analítica en una curva cerrada y simple junto a su interior salvo en un número finito de polos, cuya suma de órdenes es P , y posee un número finito de ceros, también aislados, con suma de multiplicidades M , entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = M - P$$

7.7 Fórmulas integrales de Poisson

- Fórmula integral de Poisson para un círculo:

$$f(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta) + r^2} f(Re^{i\theta}) d\theta$$

Si definimos f como $f(r, \alpha) = u(r, \alpha) + i \cdot v(r, \alpha)$:

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta) + r^2} u(R, \theta) d\theta$$

$$v(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta) + r^2} v(R, \theta) d\theta$$

- Fórmula integral de Poisson para un semiplano:

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Si definimos f como $f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot u(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot v(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Capítulo 8

Series de Laurent

8.1 Teorema de Laurent

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} / R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ con $0 < R_1 < R_2$ y una función $f(z)$, analítica en D . Entonces, para cada $z \in D$, se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w) \cdot (w - z_0)^{n-1} dw$$

Esto también se puede escribir de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Donde:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

- Toda función analítica se puede expresar mediante su desarrollo de Laurent. El desarrollo de Taylor de una función es una parte del desarrollo de Laurent (más concretamente, aquella formada por los términos a_n).
- Por lo tanto, si una función no tiene puntos singulares, su desarrollo en series de potencias será de la forma Taylor. Si incorpora singularidades, el desarrollo será de Laurent, quedando un desarrollo de Taylor si las singularidades son evitables.
- Al conjunto de elementos de la serie de Laurent que tienen los términos a_n se le llama *parte analítica*, y a los términos de b_n se la llama *parte principal*.

8.2 Algunos desarrollos especiales

$$\begin{aligned}
 \csc z &= \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \dots \right) \\
 \sec z &= \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 - z^2} - \dots \right) \\
 \tan z &= 2z \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right) \\
 \cot z &= \frac{1}{z} + 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} + \dots \right) \\
 \operatorname{csch} z &= \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 + \pi^2} - \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 + 9\pi^2} - \dots \right) \\
 \operatorname{sech} z &= \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 + z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 + z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 + z^2} - \dots \right) \\
 \tanh z &= 2z \left(\frac{1}{z^2 + (\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (3\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (5\pi/2)^2} + \dots \right) \\
 \coth z &= \frac{1}{z} + 2z \left(\frac{1}{z^2 + \pi^2} + \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 + 9\pi^2} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Por último, no conviene olvidar los siguientes desarrollos de potencias, útiles para el cálculo de series de Laurent:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-w} &= 1 + w + w^2 + w^3 + \dots \\
 \frac{1}{1+w} &= 1 - w + w^2 - w^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Siempre que sea $w < 1$.

Capítulo 9

Residuos y aplicaciones

9.1 Singularidades. Clasificación

Atendiendo a la forma que presenta el desarrollo de Laurent de una función, podremos determinar el tipo de singularidad que presenta.

Si una función tiene alguna singularidad, entonces:

- Si todos los coeficientes de la parte principal del desarrollo de Laurent son nulos, entonces la singularidad es *evitable*.
- Si la parte principal del desarrollo de Laurent posee un número finito de términos, dados por:

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Se dice que $z = z_0$ es un *polo* de orden n .

- Si existen infinitos términos en la parte principal, será una *singularidad esencial*.

9.2 Residuos

Se denomina residuo de la función $f(z)$ en el punto z_0 y se representa por $\text{Res}[f(z); z = z_0]$ o $a_{-1}(z_0)$ al coeficiente b que aparece en el desarrollo en series de Laurent de la función $f(z)$ en potencias de $z - z_0$.

- Para poder calcular un residuo, se emplea la siguiente fórmula:

$$\text{Res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

Donde k es el orden del polo correspondiente.

- **Teorema del residuo:** Sea $f(z)$ una función analítica en una curva simple C , y cerrada junto a su interior salvo en un número finito de puntos z_1, z_2, \dots, z_n del interior de esa curva. Entonces:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} [f(z); z = z_j]$$

- También podemos calcular los residuos definiendo una función $g(z)$ tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, siempre que $g(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\text{Res} [f(z); z = z_0] = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

Y si es un polo simple:

$$\text{Res} [f(z); z = z_0] = g(z_0)$$

9.3 Cálculo de integrales reales

Como regla general, deberemos escoger un recinto adecuado para el cálculo de la integral. Aplicando el teorema del residuo, igualaremos la integral a la suma de los residuos asociados a las singularidades del interior, multiplicado por $2\pi i$. Entonces, descompondremos la integral en suma de integrales a lo largo del recinto, haciendo tender por último $R \rightarrow \infty$.

Veremos algunos casos usuales:

- Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} H(\sin x, \cos x) dx$

Donde H es una función racional.

Se resuelven haciendo el cambio:

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad dx = \frac{dz}{iz}$$

La integral queda, entonces:

$$\int_0^{2\pi} H(\sin x, \cos x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} [f(z); z = z_j]$$

- Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) dx$

Siempre que H no tenga polos en el eje real, y el grado del polinomio del denominador es, al menos, dos grados mayor que el del polinomio numerador.

Tomando como recinto de integración una semicircunferencia de radio R donde $\text{Im}(z) \geq 0$, queda:

$$A + iB = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} [H(z); z = z_j]$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R H(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx = A$$

- Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} H(x) \sin x dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} H(x) \cos x dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{ix} dx$

Donde $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0$ y no tiene polos sobre el eje real.

Se resuelven igual que las anteriores, teniendo en cuenta la *desigualdad de Jordan*:

$$\text{Si } R > 0 \text{ entonces } \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt < \frac{\pi}{R}$$

- Integrales de la forma $\int_0^{\infty} \frac{H(x)}{x^a} dx$ con $0 < a < 1$

Se resuelven rodeando la singularidad. La integral que queda es:

$$\int_C \frac{H(z)}{z^a} dz = \int_{C_R} \frac{H(z)}{z^a} dz + \int_0^{\delta} \frac{H(x)}{x^a} dx + \int_{-C_{\delta}} \frac{H(z)}{z^a} dz + \int_{\delta}^R \frac{H(x)}{x^a e^{2\pi i a}} dx$$

Haciendo $R \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow 0$.

Capítulo 10

Transformaciones. Aplicaciones

10.1 Transformación conforme

Una función $f(z)$ de variable compleja diremos que es conforme en un punto z_0 si es analítica en ese punto y, además, es $f'(z_0) \neq 0$.

- Una función es *armónica* si verifica la ecuación de Laplace:

$$U(x, y) \text{ es armónica} \Leftrightarrow \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

- *Problema de Dirichlet:*

Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces, verificando:

$$- \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$- \quad u(x, y) = u_0$$

- *Problema de Neumann:*

Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces, verificando:

$$- \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$- \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0$$

10.2 Transformaciones elementales

- **Traslación:**

Se denomina traslación a la aplicación $w = z + b$, donde b es un número complejo dado.

Esta aplicación se puede escribir como:

$$\begin{aligned}u &= x + x_0 \\v &= y + y_0\end{aligned}$$

- **Transformación lineal:**

Se denomina transformación lineal a la aplicación $w = az + b$, donde a y b son números complejos y $a \neq 0$.

Esta aplicación se puede escribir como composición de las aplicaciones:

$$w = Z + b \quad Z = az$$

Esta transformación supone una dilatación, un giro y una traslación.

- **Transformación bilineal:**

Se denomina transformación bilineal a la aplicación:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

Debemos imponer las siguientes condiciones:

- $c \neq 0$
- $bc - ad \neq 0$

Esta transformación se puede escribir de la forma:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

Se puede entender como la composición de las siguientes aplicaciones:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} U \quad U = \frac{1}{Z} \quad Z = cz + d$$

- **Exponencial:** son de la forma $w = e^z$.
- **Logarítmica:** son de la forma $w = \ln(z)$, que es analítica en todo el plano complejo salvo en una semirrecta con origen en $z = 0$.
- **Potencial:** son de la forma $w = z^m$, analítica en todo el plano complejo salvo en $z = 0$.

Capítulo 11

Series de Fourier

11.1 Nociones preliminares

- **Función periódica:**

Función periódica de período $2p$:

$$f(x + 2p) = f(x)$$

- Si una función periódica tiene de período $2p$, también es periódica y de período $2np$, donde n es cualquier número entero distinto de cero.
- Dada una función periódica $f(x)$, de período $2p$, para todo $l \neq 0$ se puede encontrar otra, a partir de ella, también periódica y de período $2l$. Basta con hacer el cambio:

$$t = x \frac{l}{p} \quad g(t) = f\left(\frac{tp}{l}\right)$$

- Si $f(x)$ es periódica y de período $2p$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+2p}^{b+2p} f(x)dx$.

- **Funciones continuas y derivables a trozos:**

Dada una función $f(x)$, con valores reales o complejos, definida en un intervalo $[a, b]$, se dice que es continua a trozos si existe una partición de dicho intervalo, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tal que $f(x)$ es continua en cada subintervalo (x_i, x_{i+1}) para $i = 0, 1, \dots, n-1$ y existen, y son finitos, los límites por la derecha de los puntos x_i para $i = 0, 1, \dots, n-1$ y los límites por la izquierda de x_i para $i = 1, 2, \dots, n$.

De la misma forma, se dice que una función es derivable a trozos si es derivable en cada punto de $[a, b]$ salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos donde existen y son finitas las derivadas laterales de la función (en el caso particular del extremo del intervalo a solamente se exige derivabilidad por la derecha y en b por la izquierda).

- **Función absolutamente integrable:**

Se dice que una función $f(x)$ es absolutamente integrable en un intervalo, si existe una partición de éste tal que en cada uno de los subintervalos de esa partición $f(x)$ es integrable.

- **Función característica:**

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

11.2 Desarrollo de Fourier de una función

Bajo una serie de condiciones, se puede expresar una función como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

- Los coeficientes del desarrollo de Fourier de una función se calculan como:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

- Fórmula integral de Riemann-Lebesgue:

Sea $f(x)$ una función absolutamente integrable en un intervalo $[a, b]$, entonces para todo número real k , se tiene que:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(hx + k) dx = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(hx + k) dx = 0$$

- Fórmula integral de las sumas parciales de una serie de Fourier:

Sea $f(x)$ una función absolutamente integrable en $[0, 2\pi]$ periódica de período 2π . Denotamos por

$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$, entonces:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$$

- **Teorema de localización de Riemann:**

Sea f una función absolutamente integrable en $[0, 2\pi]$ periódica y de período 2π , entonces, la serie de Fourier de la función $f(x)$ convergerá en x si, y sólo si, para algún número r , tal que $0 < r < \pi/2$ existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$$

- **Teorema de Dirichlet:**

Sea $f(x)$ una función continua a trozos en el intervalo $[0, 2\pi]$ periódica y de período 2π y que, además, en cada punto existen las derivadas por la derecha y por la izquierda de $f(x)$, entonces existe la serie de Fourier asociada a $f(x)$, verificando que dicha serie converge, en cada punto x , hacia:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

11.3 Series de Fourier de algunos tipos de funciones

- **Funciones pares:**

Una función es par si $f(-x) = f(x)$.

La serie de Fourier será:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad b_n = 0$$

- **Funciones impares:**

Una función es impar si $f(-x) = -f(x)$.

La serie de Fourier será:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nxdx$$

Donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = 0 \quad a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

- **Función periódica de período $2T$:**

Se puede convertir a otra función de período 2π , haciendo el cambio: $t = x \frac{\pi}{T}$.

La serie de Fourier queda:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi x}{T} + b_n \sin n \frac{\pi x}{T} \right)$$

Cuyos coeficientes serán:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{2T} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{T} \int_0^{2T} f(x) \cos n \frac{x\pi}{T} dx \quad b_n = \frac{1}{T} \int_0^{2T} f(x) \sin n \frac{x\pi}{T} dx$$

- **Función no periódica:**

Dada una función no periódica $f(x)$, se puede definir otra función $g(x)$ a partir de ella que sea periódica en un determinado intervalo.

- Forma compleja de las series de Fourier:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Capítulo 12

Espacios de funciones. Series ortogonales

12.1 Definiciones

Sea $C[a, b]$ el conjunto de las funciones definidas de $[a, b]$ en \mathbb{R} o \mathbb{C} continuas a trozos.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (a \cdot f)(x) &= a \cdot f(x)\end{aligned}$$

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$(f, g) = \overline{(g, f)} \quad (f, cg) = \bar{c}(f, g)$$

$$\|f(x)\|^2 = (f, f) = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

- Desigualdad de Minkowski:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

12.2 Sistemas ortonormales de funciones

Dos funciones f y g son ortogonales si $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = 0$.

Capítulo 13

Transformada de Fourier

13.1 Teorema de la integral de Fourier

Sea $f(x)$ una función absolutamente integrable en R y tal que para el punto x se verifica que existen los valores de $f(x^+)$ y $f(x^-)$, y que las integrales $\int_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} dt$ y $\int_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t} dt$ son absolutamente convergentes para un cierto $\delta > 0$, entonces:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) \cos[s(u-x)] du ds$$

13.2 Transformada integral. Transformada de Fourier

- Transformada integral de la función $f(t)$ respecto al núcleo $K(t, s)$:

$$\int_{-\infty}^\infty K(t, s) f(t) dt$$

- Transformada de Fourier:

$$K(s, t) = e^{-its}$$

$$F[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-its} f(t) dt$$

- Transformadas en seno y coseno:

$$F_s[f(t)] = F_s(s) = \int_0^\infty f(t) \sin ts dt \quad F_c[f(t)] = F_c(s) = \int_0^\infty f(t) \cos ts dt$$

- Transformación inversa de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ist} F(s) ds$$

13.3 Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad:

$$F[af + bg] = a F[f] + b F[g]$$

- Cambio de escala:

$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- Traslación:

$$F[f(t-a)] = e^{-isa} F[f(t)]$$

- Otras propiedades:

$$F[F(t)] = 2\pi f(-s)$$

$$F[e^{ikt} f(t)] = F(s-k)$$

$$F[f'(t)] = is F[f(t)]$$

$$F(-s) = \overline{F(s)}$$

13.4 Convolución

Dadas dos funciones f y g , se denomina convolución de ambas, y se representa por $f * g$ a una nueva función definida por:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

- El producto de convolución es conmutativo.
- El producto de convolución es asociativo.

- **Identidad de Parseval:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

13.5 Transformadas de las funciones elementales

- Función rectángulo:

Se define como:

$$\Pi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a,b] \end{cases}$$

$$F\left[\prod_{[a,b]}(t)\right] = \frac{e^{-ias} - e^{-ibs}}{is}$$

$$F\left[\prod_{[-b,b]}(t)\right] = \frac{2 \operatorname{sen} bs}{s}$$

- Función exponencial:

$$F\left[e^{ct} \prod_{[a,b]}(t)\right] = \frac{e^{b(c-is)} - e^{a(c-is)}}{c - is}$$

$$F\left[e^{ct} \prod_{[0,\infty)}(t)\right] = \frac{1}{is - c}$$

$$F\left[e^{-t}\right] = \frac{1}{is + 1}$$

$$F\left[e^{c|t|}\right] = \frac{-2c}{s^2 + c^2}$$

- Función signo:

Se define como:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$F[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{2}{is}$$

- Otras funciones:

$$F\left[e^{-at^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$$

$$F\left[\frac{1}{t^2 + c^2}\right] = -\frac{\pi}{c} e^{c|s|}$$