

Tema 1: Introducción a señales y sistemas

1. Señales

Definición: Una señal es una función de una o varias variables independientes, que refleja la naturaleza de un determinado fenómeno.

Clasificación de las señales:

- atendiendo al número de variables independientes
- deterministas vs. aleatorias
- reales vs. complejas
- periódicas vs. no periódicas
- continuas vs. discretas
- cuantificadas vs. no cuantificadas

Operaciones elementales con señales:

- multiplicación por un escalar:

$$y(t) = a \cdot x(t) \quad y[n] = a \cdot x[n]$$

- suma y multiplicación:

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

- desplazamiento temporal:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

- escalado de la variable independiente:

$$y(t) = x(a \cdot t)$$

- derivación e integración:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad x(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^n y[k]$$

- señal conjugada:

$$x(t) = a(t) + j \cdot b(t) \quad x^*(t) = a(t) - j \cdot b(t)$$

$$\text{Re}[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \quad \text{Im}[x(t)] = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$$

- señales pares e impares:

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Características de las señales:

- potencia instantánea:

$$p(t) = |x(t)|^2 \quad p[n] = |x[n]|^2$$

- valor medio en un intervalo:

$$\langle x(t) \rangle_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \quad \langle x[n] \rangle_{N_1}^{N_2} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]$$

- potencia media en un intervalo:

$$\langle p(t) \rangle_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad \langle p[n] \rangle_{N_1}^{N_2} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2$$

- energía en un intervalo:

$$E|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad E|_{N_1}^{N_2} = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2$$

- valor medio:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad \langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[k]$$

- potencia media:

$$\langle p(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad \langle p[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |x[k]|^2$$

- energía:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

	energía	potencia media
señal de energía	finita	cero
señal de potencia	infinita	finita

Algunas señales especiales:

- impulso:

$$x(t) = \delta(t) \quad \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t) \quad \delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

- exponencial compleja (caso continuo):

$$x(t) = e^{st}, \text{ con } s = \sigma + j\omega$$

- exponencial compleja (caso discreto):

$$x[n] = z^n, \text{ con } z = r \cdot e^{j\Omega}$$

- periodicidad temporal:

$$N = k \frac{2\pi}{\Omega}$$

2. Sistemas

(aquí va la introducción, que es obvia)

Propiedades de los sistemas:

- *memoria*: un sistema no tiene memoria si la salida, en un instante de tiempo determinado, depende únicamente de la entrada en dicho instante.
- *invertibilidad*: un sistema es invertible si a distintas entradas se corresponden distintas salidas. Será invertible si se puede conectar otro sistema en cascada con el primero que devuelva la señal a su estado original.
- *causalidad*: un sistema es causal si la salida, en un determinado instante de tiempo, depende únicamente de los valores de la entrada en ese instante de tiempo y anteriores.
- *estabilidad*: un sistema es estable si para una determinada entrada acotada, la salida no diverge.
- *linealidad*: un sistema es lineal si se cumple:

$$x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \longrightarrow y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Por lo tanto, si la entrada es nula, la salida también deberá serlo.

- *invarianza temporal*: un sistema es invariante en el tiempo si, conocida la salida a una entrada, un desplazamiento temporal de la entrada provoca el mismo desplazamiento temporal a la salida.

Tema 2: Sistemas LTI

1. Introducción

Las señales de entrada a un sistema se pueden escribir como suma/integral de impulsos desplazados:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

En sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) podemos conocer la respuesta a cualquier entrada conociendo la respuesta del sistema al impulso, mediante la convolución:

respuesta al impulso: $h(t)$ o $h[n]$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

Propiedades de la convolución:

- conmutativa:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- asociativa:

$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$

Con estas dos propiedades se concluye que se puede intercambiar el orden de sistemas LTI conectados en cascada, y la señal de salida no cambiará.

- distributiva:

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$

- desplazamiento temporal:

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) * h(t) = x(t) * h(t - t_0)$$

- derivación:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

Propiedades de los sistemas LTI:

- *memoria*: para que un sistema LTI sea sin memoria, debe cumplir:

$$h(t) = G \cdot \delta(t) \quad h[n] = G \cdot \delta[n]$$

- *invertibilidad*: para que un sistema LTI sea invertible, debe cumplir:

$$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$$

- *causalidad*: para que un sistema LTI sea causal, la respuesta al impulso debe anularse para tiempos negativos:

$$h(t) = f(t) \cdot u(t)$$

- *estabilidad*: para que un sistema LTI sea estable, la respuesta al impulso debe cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Además, en los sistemas LTI se puede hablar de la **respuesta al escalón**:

respuesta al escalón: $s(t)$ o $s[n]$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad s(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt$$

Otra propiedad de los sistemas:

- **sistemas IIR**: respuesta al impulso infinita
- **sistemas FIR**: respuesta al impulso finita

Tema 3: Análisis de Fourier

1. Introducción a los espacios de señal

(aquí va una paja mental de los matemáticos que paso de resumir)

- producto escalar de señales:

$$\langle x(t), \phi(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \phi^*(t) \cdot dt$$

- norma de señales:

$$\|\phi(t)\|^2 = \langle \phi(t), \phi(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |\phi(t)|^2 dt$$

2. Desarrollo en serie de Fourier

Todo esto será válido para señales periódicas.

Caso continuo:

- ecuación de síntesis: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$
- ecuación de análisis: $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$

Caso discreto:

- ecuación de síntesis: $x[n] = \sum_{k=(N_0)} X_k \cdot e^{jk \frac{2\pi}{N_0} n}$
- ecuación de análisis: $X_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=(N_0)} x[n] \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N_0} n}$

Si la señal es real (caso continuo):

$$X_k = X_{-k}^* \quad x(t) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k)$$

Si la señal es real (caso discreto):

$$X_k = X_{-k}^* \quad \begin{aligned} N_0 \equiv \text{impar} &\rightarrow x[n] = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N_0-1}{2}} |X_k| \cos\left(k \frac{2\pi}{N_0} n + \angle X_k\right) \\ N_0 \equiv \text{par} &\rightarrow x[n] = X_0 + X_{\frac{N_0}{2}} (-1)^n + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N_0}{2}-1} |X_k| \cos\left(k \frac{2\pi}{N_0} n + \angle X_k\right) \end{aligned}$$

Teorema de Parseval:

$$p(x(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad p(x[n]) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=(N_0)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N_0)} |X_k|^2$$

Función sinc:

$$\text{sinc } x = \frac{\text{sen } (\pi x)}{\pi x} \quad \begin{array}{l} \text{ceros : } 0, \pm 1, \pm 2... \\ \text{polo : } 0 \quad (\text{sinc } 0 = 1) \end{array}$$

- el clásico tren de pulsos cuadrados continuo:

$$X_k = \frac{A}{k\pi} \text{sen} \left(k\pi \frac{T_1}{T_0} \right) = A \frac{T_1}{T_0} \text{sinc} \left(k \frac{T_1}{T_0} \right)$$

- el mismo tren, pero con un CT de 50%:

$$X_k = \frac{A}{2} \text{sinc} \left(\frac{k}{2} \right) \quad (\text{sólo aparece información en los armónicos impares})$$

Función sinc periódica:

$$\text{sinc } n = \frac{\text{sen } \beta n}{\text{sen } n}$$

- el clásico tren de pulsos cuadrados discreto:

$$X_k = \frac{A}{N_0} \frac{\text{sen} \left(k\Omega_0 \frac{2N_1 + 1}{2} \right)}{\text{sen} \left(k \frac{\Omega_0}{2} \right)}$$

Convergencia de las series de Fourier:

Para el caso discreto, siempre es convergente. Para el caso continuo, usaremos una de estas dos condiciones:

$$\int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \int_{(T_0)} |x(t)| dt < \infty$$

- fenómeno de Gibbs*: para un desarrollo truncado de Fourier, en las discontinuidades la aproximación tiende al valor medio, y aparece un sobreimpulso de valor $18\% \cdot A$, cuya amplitud no varía, si bien se va estrechando conforme se añaden más términos del desarrollo.

3. Transformada de Fourier

Caso continuo:

- ecuación de síntesis: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$
- ecuación de análisis: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

Caso discreto:

- ecuación de síntesis: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$
- ecuación de análisis: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$
- el clásico pulso cuadrado continuo:

$$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) \longrightarrow X(\omega) = A \cdot T_1 \cdot \text{sinc}\left(\omega \frac{T_1}{2\pi}\right)$$

Relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Relación entre series y transformadas de Fourier:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad X_k = \frac{1}{N_0} X(\Omega) \Big|_{\Omega=k\Omega_0}$$

- transformada de la exponencial compleja:

$$e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) \quad e^{jk\Omega_0 n} \xrightarrow{TF} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi l)$$

Propiedades de la transformada de Fourier:

- periodicidad*: en el caso discreto, la transformada es periódica, de período 2π .
- linealidad*:

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \longrightarrow a \cdot X_1(\omega) + b \cdot X_2(\omega)$$

- *simetrías:*

$x(t)$	$X(\omega)$
par	par
impar	impar
real	hermítica
imaginaria pura	antihermítica
hermítica	real
antihermítica	imaginaria pura
real y par	real y par
imaginaria pura y par	imaginaria pura y par
real e impar	imaginaria pura e impar
imaginaria pura e impar	real e impar

- *desplazamiento en el tiempo:*

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} \cdot X(\omega) \quad x[n - n_0] \xrightarrow{TF} e^{-j\Omega n_0} \cdot X(\Omega)$$

- *escalado:*

$$x(a \cdot t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad x_{(k)}[n] \xrightarrow{TF} X(k\Omega)$$

- *dualidad:*

$$\begin{array}{lll} x(t) \xrightarrow{TF} X(\omega) & x[n] \xrightarrow{SF} X_k & x[n] \xrightarrow{TF} X(\Omega) \\ X(t) \xrightarrow{TF} 2\pi \cdot x(-\omega) & X[n] \xrightarrow{SF} \frac{1}{N_0} x[-k] & X(t) \xrightarrow{SF} x[-k] \end{array}$$

- *convolución:*

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{TF} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

- *modulación:*

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} [X_1(\omega) * X_2(\omega)] \quad x_1[n] \cdot x_2[n] \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} [X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)]$$

- *derivación:*

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j\omega \cdot X(\omega) \quad x[n] - x[n-1] \xrightarrow{TF} (1 - e^{-j\Omega}) \cdot X(\Omega)$$

- *integración:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\xrightarrow{TF} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega) \\ \sum_{k=-\infty}^n x[k] &\xrightarrow{TF} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi \cdot X(0) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi) \end{aligned}$$

- *desplazamiento en frecuencia:*

$$x(t) \cdot e^{j\omega_c t} \xrightarrow{TF} X(\omega - \omega_c)$$

Tema 4: Muestreo de señales

1. Introducción. Teorema de muestreo

Muestreo ideal: se utiliza el producto entre la señal original y un tren de impulsos:

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot p(t) \xrightarrow{TF} X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_c(\omega) * P(\omega)]$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \xrightarrow{TF} P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$$

Si la señal original tiene un ancho de banda limitado por la frecuencia B , el muestreo debe ser:

$$\omega_s > 2 \cdot B$$

- frecuencia de Nyquist:

$$\omega_N = 2 \cdot B$$

Recuperación de la señal:

La señal original se puede recuperar mediante un filtro paso bajo:

$$h_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \xrightarrow{TF} H_r(\omega) = T_s \prod\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$$

Muestreo real:

En vez de muestrear con impulsos, se muestrea con otra señal.

$$x_s(t) = \text{muestreo ideal} * p_0(t)$$

Tema 5: Transformadas de Laplace y Z

1. Transformada de Laplace

$$TL[x(t)] = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

- algunas transformadas importantes:

$$x(t) = e^{-at} u(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{s+a}, \sigma > -a$$

$$x(t) = -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{s+a}, \sigma < -a$$

Región de convergencia:

- delimitada por *rectas*
- no contiene *polos*. Si la transformada Z de una señal es racional, la región de convergencia viene delimitada por los polos.
- *señal a derechas*: región de convergencia a derechas
- *señal a izquierdas*: región de convergencia a izquierdas
- *señal ilimitada*: región de convergencia en banda
- *señal limitada*: región de convergencia todo s
- *estabilidad*: un sistema es estable si tiene transformada de Fourier, es decir, si en el dominio s la región de convergencia contiene al eje $j\omega$.
- *causalidad*: si un sistema es causal, entonces su región de convergencia es a derechas.

2. Transformada Z

$$TZ[x[n]] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad X(\Omega) = X(z)|_{|z|=1} = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- algunas transformadas importantes:

$$x[n] = a^n u[n] \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$x[n-1] = a^{n-1} u[n-1] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{z-a}, |z| > |a|$$

$$x[n-1] = -a^{n-1} u[-n] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{z-a}, |z| < |a|$$

Región de convergencia:

- delimitada por *circunferencias*
- no contiene *polos*. Si la transformada Z de una señal es racional, la región de convergencia viene delimitada por los polos.
- *señal a derechas*: región de convergencia hacia fuera
- *señal a izquierdas*: región de convergencia hacia dentro
- *señal ilimitada*: región de convergencia en corona circular
- *señal limitada*: región de convergencia todo z

Para funciones racionales, la función de transferencia viene determinada por completo por el diagrama polo/cero, salvo por una constante multiplicativa.

- desplazamiento en el tiempo:

$$x[n - n_0] \xrightarrow{TZ} z^{-n_0} X(z)$$

- *estabilidad*: un sistema es estable si tiene transformada de Fourier, es decir, si el en dominio z la región de convergencia contiene al círculo $|z| = 1$.
- *causalidad*:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \text{cte} \Leftrightarrow \text{causal}$$